Université Paris-Diderot — Année 2013-2014
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II — L1 MASS-2

Feuille de TD 8 - Polynômes

Questions du cours.

(a) Définir l'anneau des polynômes à une variable à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$).
(b) Définir le degré d'un polynôme.
(c) Écrire la formule du binôme de Newton.
(d) Définir la derivée d'un polynôme.
(e) Écrire la formule de Leibniz (derivée d'un produit) pour les polynômes.
(f) Donner la définition de racine de multiplicité r d'un polynôme.
(g) Écrire la formule de Taylor pour les polynômes.
(h) Définir la division euclidienne d'un polynôme P par un polynôme Q.
(i) Donner la définition de polynôme irréductible.
(j) Définir la decomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles. Est-elle unique ?
(k) Définir le plus grand commun diviseur (PGCD) d'une famille de polynômes. Est-il unique ?
(l) Énoncer le théorème fondamendal de l'algèbre.

Exercice 1. Effectuer les divisions euclidiennes de P par Q, avec
(a) $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3$, $\quad Q(X) = X - 2$,
(b) $P(X) = X^5 - 4X^3 + X$, $\quad Q(X) = X + 1$,
(c) $P(X) = X^5 - X^4 + 3X^2 + 2$, $\quad Q(X) = X^2 - 1$,
(d) $P(X) = X^6 + 3X^4 - 2X^2 - 3$, $\quad Q(X) = X^2 + 1$,
(e) $P(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - X$, $\quad Q(X) = X^2 + X + 1$,
(f) $P(X) = X^5 - 3X^4 - 3X + 1$, $\quad Q(X) = X^3 - 3X^2 + 1$,
(g) $P(X) = 2X^5 + 4X^4 + 5X^3 - 2X^2 - 4X + 16$, $\quad Q(X) = X^2 + 2X + 4$,
(h) $P(X) = X^n - 1$, $\quad Q(X) = X - 1$, $\quad$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,
(i) $P(X) = X^n + 1$, $\quad Q(X) = X + 1$, $\quad$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Calculer le reste de la division de P par Q sans calculer la division euclidienne dans les cas suivants.
(a) $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 2$, $\quad Q(X) = X - 1$,
(b) $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 3X - 3$, $\quad Q(X) = X + 1$,
(c) $P(X) = X^3 - X^2 - X + 1$, $\quad Q(X) = X - \mathfrak{i}$,
(d) $P(X) = X^3 - \mathfrak{i}X^2 - 2X + 2$, $\quad Q(X) = X - \mathfrak{i} - 1$,
(e) $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X$, $\quad Q(X) = X^2 + X - 2$,
(f) $P(X) = X^4 - 2X^3 - 4X^2 + 6X + 4$, $\quad Q(X) = (X - 2)^2$,
(g) $P(X) = X^4 - 4X^2$, $\quad Q(X) = X^2 - 2X + 2$.

Exercice 3. Déterminer pour quelles valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{C}$ le polynôme Q divise le polynôme P dans les cas suivants.
(a) $P_a(X) = X^3 - aX + 2$, $\quad Q(X) = X - 2$,
(b) $P_a(X) = X^5 - aX^3 + 3X^2 - 2aX + 3$, $\quad Q(X) = X^2 + 1$,
(c) $P_a(X) = X^4 - 2X^2 - a$, $\quad Q_b(X) = X^2 - bX + 1$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

Exercice 5. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $Q(X) = X^2 + X + 1$?

Exercice 6 (Algorithme d'Euclide). Soient P, Q deux polynomes.

(a) Supposons que $\deg P \geq \deg Q$, et soit $P = MQ + R$ la division euclidienne de P par Q. Montrer que $\mathrm{PGCD}(P, Q) = \mathrm{PGCD}(Q, R)$.

(b) Montrer que si de plus $\deg R = -\infty$, alors $\mathrm{PGCD}(P, Q) = Q$, et que si $\deg R = 0$, alors $\mathrm{PGCD}(P, Q) = 1$.

Considerons l'algorithme suivant (dit *algorithme d'Euclide*). Donnés P, Q, on peut assumer que $\deg P \geq \deg Q$ (à moins d'inverser les rôles de P et Q). Soit $P = MQ + R$ la division euclidienne. Si $R = 0$, alors on définit $D(P, Q) = Q$. Si $\deg R = 0$, alors $D(P, Q) = 1$. Autrement, on définit recursivement $D(P, Q) = D(Q, R)$.

(c) En utilisant les points (a) et (b), montrer que l'algorithme d'Euclide s'arrète en temps fini, et $D(P, Q) = \mathrm{PGCD}(P, Q)$.

Exercice 7. Calculer le PGCD des familles suivantes.

(a) $P(X) = X^3 - 3X + 2$, $\quad Q(X) = X^4 - 7X^3 + 4X^2 + 3X - 1$,

(b) $P(X) = X^4 - 2X^2 + 1$, $\quad Q(X) = X^6 - 4X^4 + 3X^2$,

(c) $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X - 1$, $\quad Q(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 2$,

(d) $P(X) = X^8 + X^4 + X^2 + X + 1$, $\quad Q(X) = X^7 - 2X^2 - 2X - 1$,

(e) $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$, $\quad Q(X) = X^6 - 1$, $\quad R(X) = X^5 + 1$.

Exercice 8. Calculer le PGCD des polynômes $P_a(X) = X^4 + X^3 + (1 - a^2)X^2 - a^2X - a^2$ et $Q_b(X) = X^2 - bX + 1$ au varier de $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 9. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants.

(a) $(X-1)^2 - 2\mathrm{i}$, $\quad$ (b) $X^3 - 8\mathrm{i}$,

(c) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $\quad$ (d) $(X^2+1)^2 + 1$.

Exercice 10. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

(a) $X^2 - 3X + 2$, $\quad$ (b) $X^3 - 1$,

(c) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $\quad$ (d) $(X^2+1)^2 + 1$,

(e) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$, $\quad$ (f) $X^5 - X^3 - 6X$.

Exercice 11 (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$). Montrons que un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible en $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\deg P = 1$ ou $\deg P = 2$ et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de $P = aX^2 + bX + c$ satisfait $\Delta < 0$.

(a) Montrer que si $\deg P = 1$, alors P est irréductible.

(b) Montrer que si $\deg P = 2$, alors P est irréductible si et seulement si $\Delta < 0$.

(c) Montrer que si $\deg P = 2n + 1 > 2$ est impair, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$. En déduire que P n'est pas irréductible.

(d) Montrer que si $\deg P = 2n > 2$ est pair, alors il existe un polynôme de degré au plus 2 qui divise P. En déduire que P n'est pas irréductible. (Hint : Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ satisfait $P(z) = 0$, alors $P(\overline{z}) = 0$.)

Exercice 12 (Irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$). Soit $P_n(X) = X^n - 2$.

(a) Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

(c) Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(Hint : soit $P_n(X) = \prod_{j=1}^n (X - \eta_j)$ la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}$. Utiliser le fait que P_n est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$ si et seulement si il existe une famille $i_1 < \ldots < i_k \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ telle que $\prod_{h=1}^k (X - \eta_{i_h}) \in \mathbb{Q}[X]$.)

Exercice 13. Pour les polynômes P suivants, calculer la derivée P'. En déduire si P a des solutions multiples (dans $\mathbb{C}$), les déterminer et indiquer la multiplicité.

(a) $P(X) = X^4 - 3X^3 + 5X^2$,

(b) $P(X) = X^4 - 6X^2 + 8X - 3$,

(c) $P(X) = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$,

(d) $P(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$,

(e) $P(X) = X^5 - 2X^3 + X$,

(f) $P(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 - 1$,

(g) $P(X) = X^6 - 2X^5 - X^4 + 4X^3 - X^2 - 2X + 1$.

Exercice 14. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le polynôme $P_a(X) = X^3 - 3a^2X + 2$ admet une racine multiple ?

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

(a) Montrer que 1 est une racine multiple de $P_n(X)$, et en calculer la multiplicité.

(b) Factoriser $P_3(X) = 3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 16. Soit $P(X) = X^4 + 6X^3 + 9X^2 - 4X - 12$.

(a) Calculer $P^{(i)}(-2)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(b) Écrire $P(X)$ comme polynôme en $X + 2$.

(c) Est-ce que -2 est une racine de P ? de quelle multiplicité ?

Exercice 17. Montrer que si x est une racine de multiplicité m d'un polynôme P, alors x est une racine de multiplicité $m - 1$ pour P'.

Exercice 18 (Théorème de Bezout). On veut montrer le théorème suivant. Soient P et Q deux polynômes (non nuls) premiers entre eux (c'est-à-dire, sans facteurs communs, ou de même, $PGCD(P, Q) = 1$). Alors, il existe R, S polynômes tels que

$$R(X)P(X) + S(X)Q(X) = 1.$$

(a) Supposons que $\deg Q = 0$. Trouver R, S tels que $RP + SQ = 1$.

Supposons que $\deg P \geq \deg Q > 0$. Soient M et T avec $\deg T < \deg Q$ tels que $P = MQ + T$ (division euclidienne).

(b) Montrer que $T \neq 0$ et T et Q n'ont pas de facteurs communs.

(c) Supposons qu'il existe R_1 et S_1 tels que $R_1Q + S_1T = 1$. Montrer qu'il existe R et S tels que $PR + QS = 1$.

(d) Montrer le théorème de Bezout par recursion sur $n = \min\{\deg P, \deg Q\}$, en utilisant les points précédents.

Exercice 19. On veut trouver R et S tels que $RP + SQ = 1$, avec $P(X) = X^3 + 2X + 1$ et $Q(X) = X^2 - 1$.

(a) Écrire $P = MQ + T$ avec $\deg T < \deg Q = 2$.

(b) Écrire $Q = NT + U$, avec $\deg U < \deg T$.

(c) Trouver R_2, S_2 tels que $R_2T + S_2U = 1$.

(d) Calculer $R_1 = S_2$ et $S_1 = R_2 - NS_2$. Montrer que $R_1Q + S_1T = 1$.

(e) Calculer $R = S_1$ et $S = R_1 - MS_1$. Montrer que $RP + SQ = 1$.

Exercice 20. Soient $P(X) = X^3 - X$ et $Q(X) = X^4 - 5X^2 + 4$.

(a) Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Quels facteurs de P divisent Q ?

(c) Déduire du point (b) la valeur de $D = \mathrm{PGCD}(P, Q)$.

(d) Trouver R, S tels que $RP + SQ = D$.

Exercice 21. Trouver tous les polynômes à coefficients complexes P, Q tels que $P^2 = XQ^2$.

Exercice 22. Montrer que les seuls polynômes P à coefficients complexes tels que P' divise P sont les polynômes de la forme $\alpha(X - x_0)^k$, avec $\alpha, x_0 \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$.